

타원, 케플러, 궤도운동

강성훈

1. 타원

타원은 두 초점에서 떨어진 거리의 합이 같은 점들을 모은 것이다.

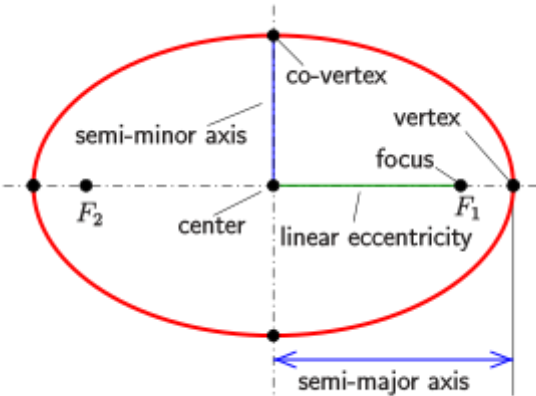


그림 1. <https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse>

타원을 정의하는 다른 방법도 있다. 그림 2와 같이 x 축 상의 어떤 점 $(a, 0)$ 와 어떤 실수 e 에 대해 ($a > 0$, $0 < e < 1$), 점 P 와 점 $(ae, 0)$ 간의 거리를 r , 점 P 와 직선 $x = a/e$ 간의 거리를 d 로 두고 $r/d = e$ 를 만족하는 점 P 의 궤적이 어떤 곡선이 되는지 알아보자.

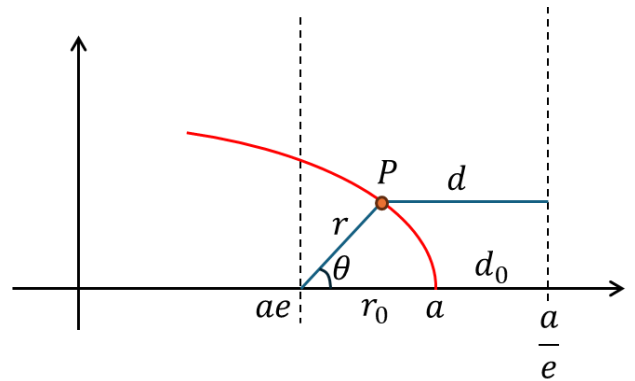


그림 2

수식으로는 보통 직교좌표계에서 아래와 같이 적는다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

식 (1)의 타원은 $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ 를 지난다. $a > b$ 인 경우 x 축이 장축(major axis), y 축이 단축(minor axis)이 된다. a 와 b 는 각각 장반경, 단반경이라고 부른다. 이때 초점은 x 축 상의 두 점 $(c, 0)$ 과 $(-c, 0)$ 이 되며, 여기서 c 는 아래 식을 만족하는 값이다.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (2)$$

타원의 모양, 즉 타원이 얼마나 찌그러져 있는지 표현하기 위한 값이 2개 있는데, 하나는 이심률(eccentricity) e 이고 다른 하나는 타원율(ellipticity) η 이다. 각각은 아래와 같이 정의된다.

$$e = \frac{c}{a} \quad (3)$$

$$\eta = \frac{a-b}{a} \quad (4)$$

점 P 의 좌표를 (x, y) 로 두면 아래와 같이 쓸 수 있고,

$$\begin{aligned} x &= ae + r \cos \theta = a/e - d \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

x, y 는 아래 등식을 만족하며,

$$(x - ae)^2 + y^2 = r^2 \quad (5)$$

$r/d = e$ 임을 이용하면

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{d^2} &= e^2 = \frac{(x - ae)^2 + y^2}{\left(\frac{a}{e} - x\right)^2} \\ (a - xe)^2 &= (x - ae)^2 + y^2 \\ x^2(1 - e^2) + y^2 &= a^2(1 - e^2) \end{aligned}$$

로부터 아래 형태가 도출된다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \quad (6)$$

점 P 가 y 축 상에 있을 때의 P 의 좌표를 $(0, b)$, 그 때의 r 과 d 를 각각 r_b, d_b 로 두면

$$r_b^2 = a^2e^2 + b^2$$

$$d_b^2 = a^2/e^2$$

가 되고

$$\left(\frac{r_b}{d_b}\right)^2 = \frac{a^2e^2 + b^2}{a^2/e^2} = e^2$$

로부터

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (7)$$

라는 결론을 얻을 수 있다. 식 (7)을 식 (6)에 대입하여 아래와 같은 타원 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

그림 2에서 직선 $x = a/e$ 을 타원의 준선directrix이라고 부른다. 물론 직선 $x = -a/e$ 도 타원의 준선이다.

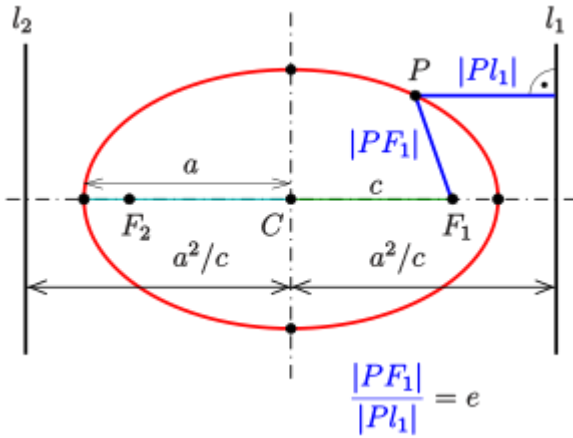


그림3. <https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse>

타원을 식 (1)과 다른 형태로 쓸 수 있다.

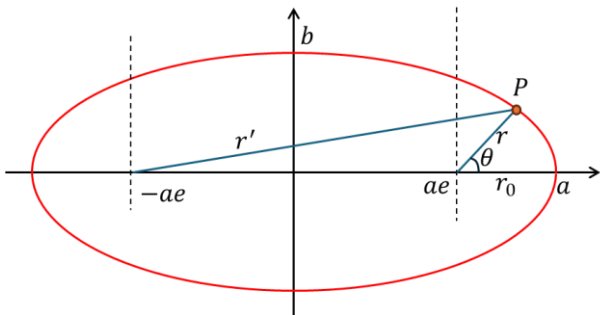


그림 4

그림 4와 같이 초점 $(ae, 0)$ 과 점 P 사이의 거리를 r ,

초점 $(-ae, 0)$ 과 점 P 사이의 거리를 r' 로 두면, 타원의 정의에 의해

$$r + r' = 2a \quad (9)$$

이므로,

$$r'^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \quad (10)$$

로 쓸 수 있다.

한편 r' 는 $(-ae, 0)$ 과 $(ae + r \cos \theta, r \sin \theta)$ 사이의 거리 이므로

$$r'^2 = (2ae + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta \quad (11)$$

이기도 하여, 두 식 (10)과 (11)을 이용하면

$$\begin{aligned} 4a^2 - 4ar + r^2 &= (2ae + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta \\ 4a^2 - 4ar &= 4a^2e^2 + 4aer \cos \theta \\ a^2(1 - e^2) &= ar(1 + e \cos \theta) \end{aligned}$$

의 과정을 거쳐

$$a(1 - e^2) = r(1 + e \cos \theta) \quad (12)$$

가 되는데, $r_0 = a(1 - e)$ 을 이용하면

$$\frac{r_0}{r} = \frac{1 + e}{1 + e \cos \theta} \quad (13)$$

의 형태로 타원을 쓸 수 있음을 알 수 있다. 여기서 θ 의 기준이 원점이 아닌 타원의 초점임에 주의하자.

2. 행성의 궤도

아이작 뉴턴은 물리학의 걸작 중 하나인 프린키피아를 17세기에 저술했다. 질량을 가진 두 물체, 예를 들면 태양과 지구 사이에는 거리의 제곱에 반비례하는 힘이 작용한다는 것은 당시에 이미 어느 정도 알려져 있었다. 그리고 행성의 궤도가 타원이라는 것도 그보다 약 80년 전에 요하네스 케플러가 관측을 통해 밝혔다. 문제는 뉴턴 역학과 만유인력의 법칙으로부터 타원 궤도를 유추하는 것이었다. 이 빈틈을 채운 것이 뉴턴의 프린키피아이다.

두 천체의 질량을 각각 M 과 m 이라고 하자. 태양과 지구, 태양과 혜성, 지구와 달, 지구와 인공위성 등 어느 짝이든 상관없다. 질량 m 이 질량 M 주위를 공전한다. M 이 m 보다 충분히 커서 M 은 거의 움직이지 않는다고 가정한다.

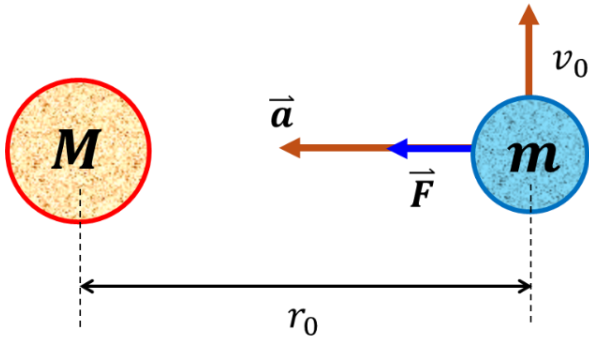


그림 5

그림 5와 같이 어느 순간 M 와 m 간의 거리는 r_0 , m 의 선속도는 v_0 이고 방향은 M 와 m 을 잇는 선에 수직이라고 하자. 뉴턴의 운동 제2법칙인 $F = ma$ 를 극좌표계에서 쓰면 아래와 같다.

$$F_r = ma_r = m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \quad (14)$$

$$F_\theta = ma_\theta = m \left(r\alpha + 2\omega \frac{dr}{dt} \right) \quad (15)$$

그림 5의 상황에서는 θ 방향 힘이 없으므로, 식 (14), (15)는 아래와 같아진다.

$$-G \frac{Mm}{r^2} = m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \quad (16)$$

$$0 = m \left(r\alpha + 2\omega \frac{dr}{dt} \right) \quad (17)$$

두 식을 연립하면 미분방정식이 하나 도출되는데, 그 과정이 꽤 복잡해서 여기에는 적지 않겠다. 자세한 내용은 [1], [2] 등을 참고해보길 바란다. 도출되는 미분방정식은 아래와 같은데, $u = 1/r$ 로 치환된 것이다.

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \quad (18)$$

이 미분방정식의 일반해는 아래와 같으며,

$$u = A \sin \theta + B \cos \theta + \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \quad (19)$$

초기조건을 대입하면 아래의 결과물이 나온다.

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \right) \cos \theta + \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \quad (20)$$

아래와 같이 치환하고 정리하면

$$e' := \frac{GM}{r_0 v_0^2} \quad (21)$$

식 (20)은 아래와 같이 바뀌는데

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1}{(1 - e') \cos \theta + e'} \quad (22)$$

타원을 표현하는 식 (13)의 형태로 맞추기 위해 $e' = 1/(1 + e)$ 로 두면,

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1 + e}{1 + e \cos \theta} \quad (23)$$

가 되어 질량 m 의 궤도가 타원이고 질량 M 의 위치가 바로 타원의 초점이 됨을 알 수 있다. 이 타원의 이심률은 아래와 같다.

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \quad (24)$$

미분방정식이 없던 시절에 뉴턴이 어떻게 이 결론에 도달했는지 궁금하다. 천체의 궤도가 타원임은 케플러 제1법칙이기도 하다.

3. 각운동량 보존과 케플러 법칙

이제 케플러 제2법칙과 제3법칙을 유도할 차례이다. 그 전에 각운동량에 대해 언급해야 한다. 우선 질점이 어떤 점 O 에 대해 받는 토크는 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{T}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (25)$$

지금부터 굵은 글씨는 모두 벡터이다.

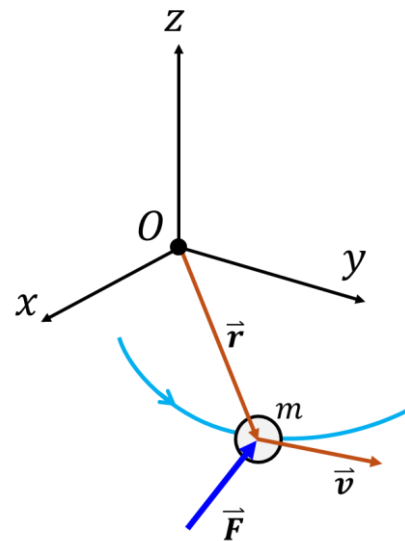


그림 6

점 O 에 대한 질점의 각운동량은 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (26)$$

각운동량의 시간에 대한 변화율을 계산해보면

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}_O}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{T}_O \end{aligned} \quad (27)$$

가 되어, 토크가 각운동량의 시간에 대한 변화율과 같음을 알 수 있다. 이것은 물체에 가하는 힘이 물체의 운동량의 변화율과 같다는 뉴턴의 운동 제2법칙을 회전운동으로 바꾼 것이기도 하다.

어떤 기준점 O 에 대해서 질점에 가해지는 토크가 0이라면 같은 점에 대한 질점의 각운동량은 시간에 대해 보존됨을 알 수 있는데, 그림 5의 궤도운동이 바로 이 성질을 만족한다. 그림 7과 같이 질량 m 이 어디에 있던 질량 M 의 위치에 대해 \mathbf{r} 과 \mathbf{F} 는 항상 같은 방향이기 때문이다. 이와 같이 움직이는 물체에 가해지는 힘의 방향이 항상 한 점을 가리키는 운동을 중심력 운동이라고 부른다.

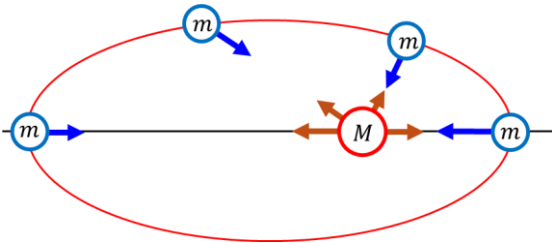


그림 7

이제부터 질량 M 의 중심을 점 O 로 정의한다. 질량 m 의 각운동량은 극좌표계에서 아래와 같다.

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m(\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta) \quad (28)$$

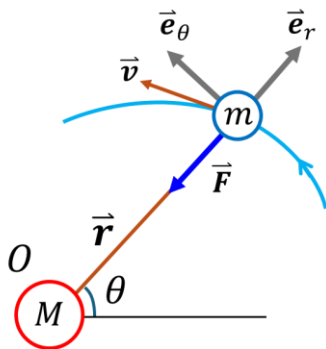


그림 8

식 (28)에서 \mathbf{r} 과 \mathbf{v}_r 은 항상 같은 방향이므로, 그림 8에서 중심력 운동을 하는 질량 m 의 각운동량의 크기는 아래와 같다.

$$H_O = mrv_\theta = \text{const.} \quad (29)$$

지구가 태양과 가장 가까울 때를 근일점(perihelion), 가장 멀 때를 원일점(aphelion)이라고 부른다. 달이 지구와 가장 가까울 때를 근지점(perigee), 가장 멀 때를 원지점(apogee)라고 부른다. 이 이름들에는 거리를 재는 기준이 태양인지 지구인지가 들어가 있다. 기준점에 상관없이 이름을 붙일 수 있어야 한다. 두 천체가 가장 가까운 점을 근점(periaxis), 가장 먼 점을 원점(apaaxis)이라고 부르는 듯하나[3] 많이 쓰이는 용어는 아닌 것 같다. 그림 9에서 점 2가 원점, 점 3이 근점에 해당된다. 그림 5에서 표현한, 질량이 작은 천체의 속도가 두 천체를 잇는 선에 수직인 상황이 근점 또는 원점이다.

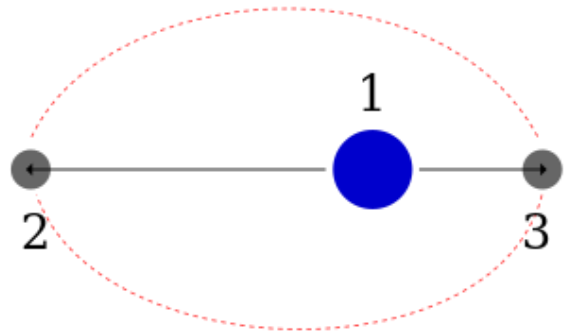


그림 9. <https://en.wikipedia.org/wiki/Apsis>

그림 10과 같이 근점에서 두 천체 간의 거리 r_0 와 작은 천체인 질량 m 의 속도 v_0 가 주어졌다면 원점 거리 r_1 과 질량 m 의 속도 v_1 을 구할 수 있다.

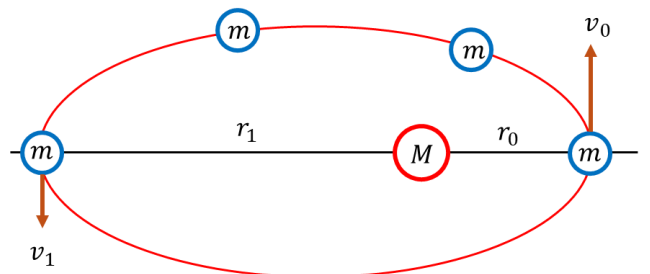


그림 10

우선 근점 거리와 속도를 식 (24)에 대입하면 궤도의

이심률을 구할 수 있고, 타원의 성질을 이용하면 이심률로부터 원점 거리를 계산할 수 있다.

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1+e}{1-e} \quad (30)$$

식 (29)에 의해 궤도운동의 rv_θ 는 상수인데, 근점과 원점에서는 $v_\theta = v$ 이므로, 아래 식으로 원점에서의 속도를 알 수 있다.

$$v_1 = v_0 \frac{r_0}{r_1} = \left(\frac{2GM}{r_0 v_0^2} - 1 \right) v_0 \quad (31)$$

궤도운동의 각운동량이 보존됨을 이용하면 케플러 제2법칙을 증명할 수 있다. 그림 11은 시간 dt 동안 두 천체를 연결하는 선분이 쓸고 지나간 면적 dA 를 표시한 것이다. 각도 θ 는 두 천체를 잇는 선과 m 의 선속도 간의 각도이다.

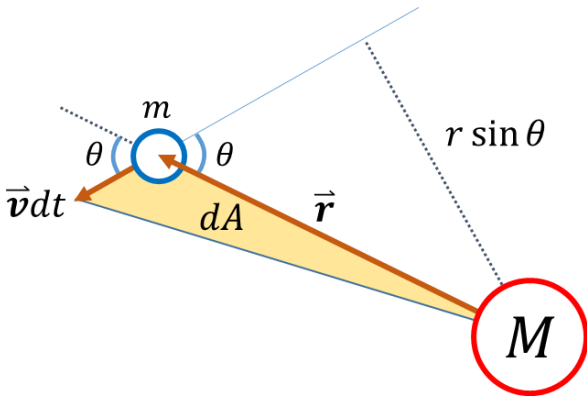


그림 11

면적 dA 는 아래와 같은데,

$$dA = \frac{1}{2} (v dt)(r \sin \theta)$$

식을 적당히 조작하면

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} (r dt)(v \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2} r v_\theta dt \end{aligned}$$

가 되어, 아래와 같이

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v_\theta = \frac{H_0}{2m} = \text{const.} \quad (32)$$

면적의 시간에 대한 변화율이 일정함을 알 수 있다. [2]에는 다른 증명도 있으니 참고해보기 바란다.

식 (32)로부터 공전주기를 계산할 수 있다. dA/dt 가

상수이므로 전체 면적은 이 값에 공전주기를 곱하면 된다. 그런데 타원의 면적은 장반경 a , 단반경 b 에 대해 πab 이므로 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$A = \frac{1}{2} r_0 v_0 T = \pi \left(\frac{r_0 + r_1}{2} \right)^2 \sqrt{1-e^2} \quad (33)$$

이 식을 이용하여 아래와 같이

$$T = \frac{2\pi r_0 \sqrt{1-e^2}}{v_0 (1-e)^2} \quad (34)$$

주기 T 의 표현식을 얻을 수 있다.

케플러 제3법칙은 주기의 제곱과 궤도 장반경의 세제곱의 비율이 일정함을 말한다. 궤도 장반경 a 는 식 (30)을 이용하면 아래와 같으므로,

$$a = \frac{r_0 + r_1}{2} = \frac{1}{2} \left(r_0 + r_0 \frac{1+e}{1-e} \right) = \frac{r_0}{1-e} \quad (35)$$

케플러 제3법칙은 아래와 같이 증명된다.

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{T^2} &= \frac{r_0^3}{(1-e)^3} \frac{v_0^2}{4\pi^2 r_0^2} \frac{(1-e)^4}{1-e^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{r_0 v_0^2}{1+e} \\ &= \frac{GM}{4\pi^2} \end{aligned} \quad (36)$$

마지막 줄에서 식 (24)가 사용되었다.

근점에서의 운동에너지와 위치에너지를 각각 T_0 과 U_0 , 원점에서의 운동에너지와 위치에너지를 각각 T_1 과 U_1 으로 놓으면, 각각은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} m v_0^2 \\ U_0 &= -\frac{GMm}{r_0} \\ T_1 &= \frac{1}{2} m v_1^2 \\ U_1 &= -\frac{GMm}{r_1} \end{aligned}$$

역학적 에너지는 보존되어야 하므로, 아래 등식이 만족되어야 한다.

$$T_0 + U_0 - T_1 - U_1 = 0 \quad (37)$$

좌변을 계산하면 아래와 같은데,

$$\begin{aligned} (LHS) &= \frac{1}{2} m \left[(v_0^2 - v_1^2) - 2GM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} m (v_0 - v_1) \left[v_0 + v_1 - \frac{2GM}{r_0 v_0} \right] \end{aligned}$$

식 (31)이 아래 사실을 말해주고 있으므로

$$v_1 = \frac{2GM}{r_0 v_0} - v_0$$

식 (37)이 성립하고 역학적 에너지가 보존됨을 알 수 있다.

참고문헌

[1] A. Berdford, W. Fowler, *Engineering Mechanics: Dynamics*, 5th edition, Pearson, 2007.

[2] <https://radio.astro.gla.ac.uk/a1dynamics/keplerproofs.pdf>

[3] <https://wiki.kerbalspaceprogram.com/wiki/Terminology/ko>