힘이 축에 대해 가하는 모멘트

강성훈

1. 힘의 한 점에 대한 모멘트

그림 1과 같이 강체의 점 B에 힘 $\boldsymbol{F}$가 가해지고 있을 때, 어떤 점 O에 대한 힘의 모멘트는 아래와 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1}$$

여기서 $\boldsymbol{r} = \overline{OB}$이고 $\times$는 벡터의 외적이다. 굵은 폰트는 모두 벡터이다.

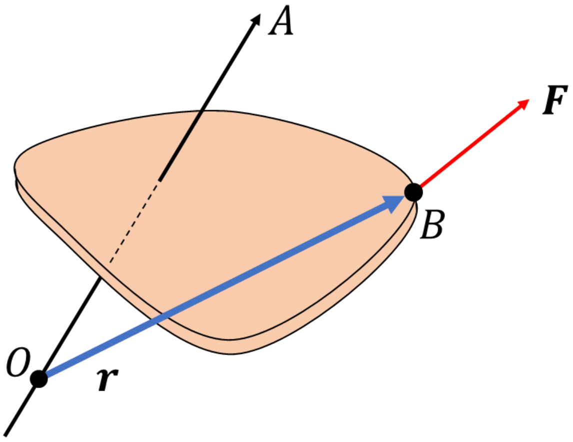

그림 1

힘 $\boldsymbol{F}$가 축 A에 대해 가하는 모멘트는 어떻게 계산할 수 있을까?

2. 힘과 위치벡터의 분해

그림 2와 같이 힘의 작용점인 점 B를 지나고 축 A에 수직인 평면 P를 고려하자. 평면과 축 A가 만나는 점을 C라고 두자. 힘 $\boldsymbol{F}$는 평면 P에 수직인 성분 $\boldsymbol{F}_A$와 평면 P상의 성분 $\boldsymbol{F}_P$로 분해할 수 있다.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_P \tag{2}$$

그런데 $\boldsymbol{F}_A$는 축 A와 같은 방향이므로 축 A에 대해서 회전시키려는 모멘트에는 전혀 기여하지 않는다. 즉, 힘 $\boldsymbol{F}$ 중 축 A에 대해 회전시키려는 모멘트에 기여하는 것은 $\boldsymbol{F}_P$밖에 없다. 따라서 축 A에 대한 모멘트를 계산할 때에는 $\boldsymbol{F}_P$만 고려하면 된다.

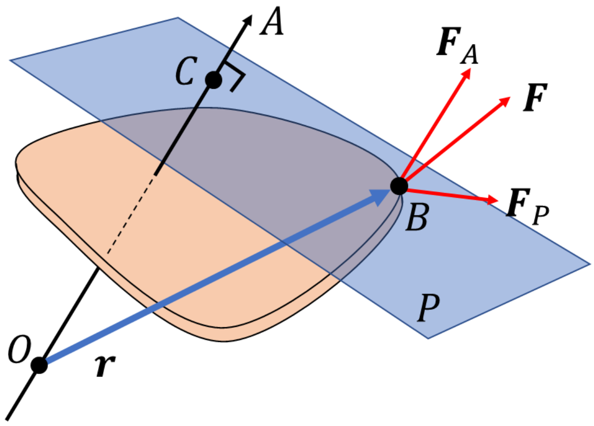

그림 2

거리 $\boldsymbol{r}$ 역시 분해할 수 있다. 그림 3과 같이 $\boldsymbol{r}_A = \overline{OC}$, $\boldsymbol{r}_P = \overline{CB}$로 분해하자.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_P \tag{3}$$

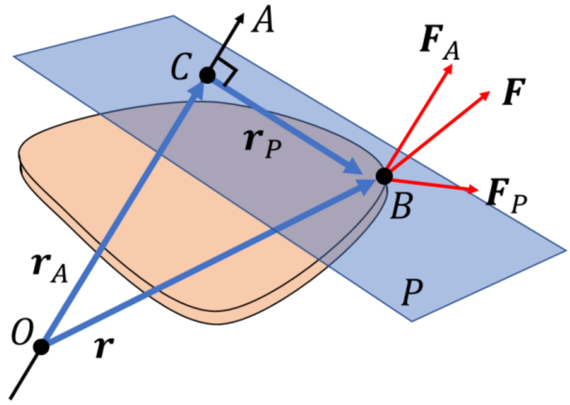

그림 3

모멘트에 기여하는 것은 힘만이 아니다. 거리 역시 모

멘트에 기여한다. 렌치로 나사를 조이거나 풀 때 큰 힘도 필요하지만 긴 거리도 필요함을 생각하면 된다. 그림 3을 보면 $\boldsymbol{r}_A$는 힘 $\boldsymbol{F}_P$가 축 A에 대해 가하는 모멘트에 기여하지 않음을 알 수 있다. 왜냐하면, 아래의 벡터

$$\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F}_P$$

는 축 A에 수직한 모멘트 성분이기 때문이다. 결론적으로, 힘 $\boldsymbol{F}$가 축 A에 대해 가하는 모멘트 $\boldsymbol{M}_A$는 $\boldsymbol{r}_P$와 $\boldsymbol{F}_P$만 있으면 계산된다. 즉,

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{F}_P \tag{4}$$

이다. 점 O는 축 A 상의 아무 점이어도 상관없다는 뜻이기도 하다.

그런데 복잡한 구조가 주어졌을 때 축 A, 점 B, 힘 $\boldsymbol{F}$로부터 $\boldsymbol{r}_P$와 $\boldsymbol{F}_P$를 계산하는 것은 매우 번거롭다. 계산을 더 쉽게 하는 방법이 있으면 좋겠다.

3. 힘의 축에 대한 모멘트

식 (2)와 (3)을 식 (1)에 대입하자.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_O &= (\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_P) \times (\boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_P) \\ &= (\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F}_A) + (\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F}_P) + (\boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{F}_A) + (\boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{F}_P)\end{aligned} \tag{5}$$

우선 첫 번째 항은 0이다. 두 벡터의 방향이 같기 때문이다. 그리고 두 번째와 세 번째 항은 축 A에 수직이므로 A에 대한 모멘트에 기여하지 않는다. 따라서 축 A에 대한 모멘트는 마지막 항만 남게 되는데, 이미 앞에서 설명한 바 있다.

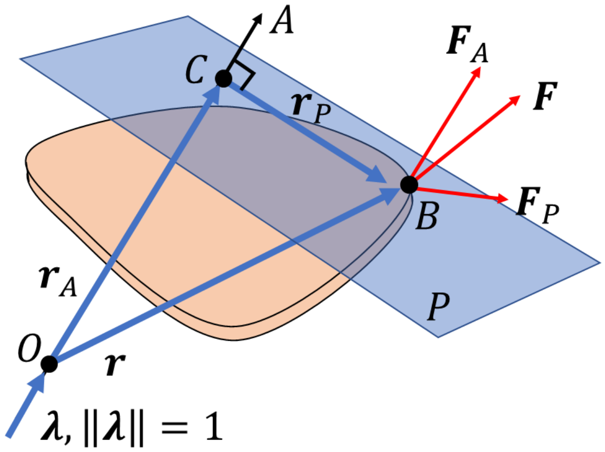

그림 4

식 (5)에서 마지막 항만 남기려면 어떻게 하면 될까? 간단하다. 축 A 방향으로의 단위벡터를 내적하면 된다. 그림 4와 같이 축 A 방향으로의 단위벡터를 $\boldsymbol{\lambda}$로 두고 아래를 계산해보면,

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{M}_O$$

식 (5)에서 두 번째와 세 번째 항도 없어진다. 수직한 두 벡터의 내적은 0이기 때문이다. 따라서 식 (4)는 아래와 같이 단순화된다.

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) \tag{6}$$

어떤 벡터 $\boldsymbol{P}$를 단위벡터 $\boldsymbol{Q}$와 내적한다는 것은, $\boldsymbol{P}$를 $\boldsymbol{Q}$ 방향으로 정사영projection 한 것의 크기를 구한다는 것과 같은 말이다. 즉, **힘이 축에 대해 가하는 모멘트는 축 상의 임의의 점에 대해 힘이 가하는 모멘트를 축에 정사영한 것과 같다**는 사실을 식 (6)이 말하고 있는 것이다.

식 (5)의 2, 3번째 항이 없어지는 것은 다른 방법으로 보일 수도 있다. 세 벡터의 스칼라 3중곱scalar triple product은 아래의 성질을 갖는데,

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$$

이것을 식 (6)에 적용해보면 식 (5)에서 2, 3번째 항이 없어진다.

세 벡터 $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$가 직교좌표계의 성분으로 주어져 있다면, $\boldsymbol{r}$과 $\boldsymbol{F}$의 외적은 아래와 같이 계산할 수도 있다.

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{7}$$

여기서 $|A|$는 행렬 A의 행렬식determinant이다. 식 (7)의 앞에 $\boldsymbol{\lambda}$를 내적하는 것은, 아래의 행렬식을 계산하는 것과 같다.

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{8}$$

참고문헌

[1] Beer, Ferdinand Pierre, and Elwood Russell Johnston. *Vector mechanics for engineers: statics and dynamics*. New York: McGraw-Hill, 1977.